

文章编号: 1000-7598-(2007) 02-0269-05

Biot 固结有限元方程组的病态规律分析

丁洲祥¹, 龚晓南², 朱合华¹, 蔡永昌¹, 李天柱³, 唐亚江³

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 浙江大学 岩土工程研究所, 杭州 310027; 3. 宁夏公路勘察设计研究院, 银川 750004)

摘 要: 针对 Biot 固结有限元方程组的病态问题, 采用正交试验和量纲分析法探讨病态性的变化规律及其影响因素。主要考虑单元平均尺寸、时间步长、压缩性和渗透性等 4 个因素的影响。分别提出 2 组相互独立的相似准则, 在此基础上得到 2 个新的无量纲量, 并将其用于分析 Biot 固结有限元方程组系数矩阵的条件数的变化规律。结合算例进行参数分析结果表明, 对病态程度的敏感性由大到小依次为单元平均尺寸、时间步长、压缩性和渗透性; 单元平均尺寸太小会使病态加剧; 随着 2 个无量纲量的增大, 病态程度呈现单调增加的趋势。其结果为深化对 Biot 固结数值分析病态问题的认识提供有益参考。

关 键 词: Biot 固结理论; 有限元法; 病态问题; 正交试验; 量纲分析

中图分类号: TB 115; TU411.3

文献标识码: A

Study on ill-conditioned problems of Biot's consolidation finite element equations

DING Zhou-xiang¹, GONG Xiao-nan², ZHU he-hua¹, CAI Yong-chang¹, LI Tian-zhu³, TANG Ya-jiang³

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China; 3. Ningxia Highway Survey and Design Institute, Yinchuan 750004, China)

Abstract: Aimed at the ill-conditioned problem of Biot's consolidation finite element method (BCFEM), both orthogonal test and dimensional analysis method are used to study the ill-conditioning regularity and its influencing factors. The influencing factors such as the average size of finite element, the length of timestep, the compressibility of soil and the permeability of soil are taken into account. Two groups of independent similarity criteria are proposed, on the basis of which, two novel dimensionless variables are obtained to analyze the variation of the condition number of BCFEM coefficient matrix. Through the parametric study of an illustrative case, the results show that the average size of finite element, the length of timestep, the compressibility of soil and the permeability of soil are in the order of priority of sensitivity. The smaller the averaged size of finite element, the worse the ill-conditioning situation of BCFEM. With the increase of the presented dimensionless variables, the ill-conditioning number shows a tendency to increasing, etc. The conclusions are helpful to study the ill-conditioned problem of BCFEM.

Key words: Biot's consolidation theory; finite element method; ill-conditioned problem; orthogonal test; dimensional analysis

1 引 言

Biot (1941 年) 固结理论^[1]由运动平衡方程和连续性方程构成, 可以考虑固结过程中土体平均总应力随时间的变化, 这是 Biot 固结理论比 Terzaghi-Rendulic 固结理论更合理的主要原因。然而, 由于数学上的困难, 采用级数和积分变换的方法只能对少数简单的边值问题求出解析解。鉴于有限元法在处理非均质材料、非线性本构关系以及复杂边界条

件等方面的优势, 采用有限元法求解 Biot 固结方程在工程界得到了广泛应用。

Biot 固结有限元方程组是病态方程组。一般认为在固结有限元计算中时间步长不宜取得太小, 否则, 方程组的系数矩阵会因为渗流矩阵部分的元素太小而成为病态矩阵^[2], 难以求得正确解答。在实际计算中关于时间步长的选择, 沈珠江 1976 年就给出建议的取值范围^[3], Verruijt 也给出第一个时间步长数量级的估计公式^[4]。

收稿日期: 2004-10-14

修改稿收到日期: 2005-01-27

基金项目: 国家自然科学基金及二滩水电开发有限责任公司雅砻江水电开发联合研究基金项目 (No. 50579093, No. 50578143)。

作者简介: 丁洲祥, 男, 1976 年生, 博士, 讲师, 从事隧道与地下工程、土力学与地基处理等方面的研究。E-mail: dingzhouxiang@163.com

在计算数学领域,关于线性方程组的病态问题及其处理方法已有比较系统地研究,但对 Biot 固结有限元方程组的病态问题,目前还很少见到对其病态程度、病态影响因素及其变化规律的详细研究报告。鉴于该问题的重要意义和研究现状,本文将探讨土体渗透性、压缩模量、有限单元平均尺寸和时间步长等 4 个因素对病态程度的影响,安排正交试验对各因素的敏感性大小进行初步分析,提出了 2 个无量纲参数分析 Biot 固结有限元方程组的病态规律,可为固结问题数值分析提供有益参考。

2 参数敏感性正交试验分析

采用加权残值法和线性差分格式,对 Biot 固结控制方程进行空间离散和时间离散,可以得到其增量有限元方程组^[5]:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^e = \Delta\mathbf{R}^e \quad (1)$$

其中 $\mathbf{K}$ 为单元固结矩阵,其子矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cij} & \mathbf{K}_{cij} \\ \mathbf{K}_{cji} & -\theta\Delta t\mathbf{K}_{sjj} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{K}_{cij}$ 为单元刚度矩阵的子矩阵; $\mathbf{K}_{cij}$ 为单元耦合矩阵的子矩阵; $\mathbf{K}_{sjj}$ 为单元渗流矩阵的元素; θ 为时间差分常数; Δt 为时间步长; $\Delta\mathbf{U}^e$ 为单元节点未知量增量列阵; $\Delta\mathbf{R}^e$ 为单元等效节点荷载和流量增量列阵。

由式(2)可明显地看出,如果 Δt 取值太小,则主对角线上的元素 $-\theta\Delta t\mathbf{K}_{sjj}$ 就可能因 Δt 太小而导致系数矩阵变成病态,引起式(1)病态的其它因素可能还有单元平均尺寸 ΔH 、土体的渗透系数 k 、压缩模量 E_s 等。差分系数 θ 不能任意取值,数值解答的稳定性一般要求 $0.5 \leq \theta \leq 1$ 。因此,本文不考虑差分系数 θ ,主要讨论 Δt 、 ΔH 、 k 和 E_s 等 4 个因素对 Biot 固结有限元方程组病态性的影响。

计算数学的有关理论认为,系数矩阵的条件数反映了相应的线性方程组的性态,如果系数矩阵的条件数越大,则该方程组就越病态^[6],而条件数与所取的矩阵范数有关,最常用的是矩阵的无穷范数和 2 范数,这里选择固结系数矩阵的无穷范数 n 来考察 Biot 固结有限元方程组的病态程度。

算例设计:一维线弹性固结问题,计算埋深 20 m,底部土体固定,不排水;地表土体排水;单元均匀划分。单元平均尺寸 (A)、压缩模量 (B)、渗透系数 (C) 和时间步长 (D) 等 4 因素的水平情况见表 1。选用 $L_9(3^4)$ 正交表^[7]安排数值试验,试验方案及条件数 n 的常用对数值 $\lg n$ 见表 2。

表 1 各因素及其水平
Table 1 Factors and the levels

水平	因素			
	A/m	B/MPa	$C/10^{-4}m \cdot d^{-1}$	D/d
1	0.5	0.6	0.086 4	0.001
2	1	1.2	0.864	0.1
3	2	2.4	8.64	10

表 2 正交试验设计及其结果
Table 2 Design of orthogonal experiment and results

试验号	因素				$\lg n$
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	17.463 39
2	1	2	2	2	17.710 42
3	1	3	3	3	16.747 55
4	2	1	2	3	15.834 54
5	2	2	3	1	16.683 38
6	2	3	1	2	17.195 64
7	3	1	3	2	14.784 38
8	3	2	1	3	15.365 13
9	3	3	2	1	16.321 89

对正交试验结果 $\lg n$ 进行极差分析结果见表 3,可见影响 Biot 固结有限元方程组病态程度的 4 个因素中,其参数敏感性由大到小依次排列为: $A > D > B > C$ 。单元平均尺寸对病态性的影响最为敏感,这意味着在有限元分析中需要注意网格的合理划分。

表 3 正交试验结果的极差分析
Table 3 Range analysis of orthogonal experimental results

参数	因素			
	A	B	C	D
K_{1j}	51.921 36	48.082 31	50.024 16	50.468 66
K_{2j}	49.713 55	49.758 93	49.866 86	49.690 45
K_{3j}	46.471 41	50.265 08	48.215 31	47.947 21
$\bar{K}_{1j}$	17.307 12	16.027 44	16.674 72	16.822 89
$\bar{K}_{2j}$	16.571 18	16.586 31	16.622 29	16.563 48
$\bar{K}_{3j}$	15.490 47	16.755 03	16.071 77	15.982 4
极差	1.816 651	0.727 589	0.602 95	0.840 484

下面进一步分析在其他条件不变的情况下单元平均尺寸对系统病态程度的影响,共选取 6 种典型情况下的参数组合见表 4。各种情况下的 $\lg n$ 随单元平均尺寸的变化规律如图 1 所示,可见随着单元平均尺寸的增大, $\lg n$ 逐渐减小。各系列均表现出类似规律,如果单元平均尺寸缩小一倍,则系统的病态程度 $\lg n$ 大约增加一个数量级。在有限元分析中,有时为了提高结果精度而将全部或部分网格划分地非常细,这可能会加剧问题的病态性。这一点值得注意。

表4 不同系列的参数取值
Table 4 Parameter list for various cases

系列	压缩模量 /MPa	渗透系数 / $10^{-4}\text{m}\cdot\text{d}^{-1}$	时间步长 /d
a	0.6	8.64	100
b	2.4	8.64	0.1
c	1.2	0.864	1
d	1.2	0.864	0.001
e	0.6	0.0864	1
f	0.6	0.0864	0.001

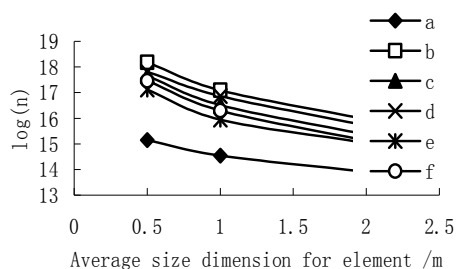


图1 $\lg n$ 与单元平均尺寸的关系
Fig.1 Relation between $\lg n$ and average size dimension for elements

3 病态规律的无量纲参数分析

Biot 固结有限元方程组系数矩阵的条件数 n 与时间步长、渗透系数、压缩模量和单元平均尺寸等若干物理量之间的解析函数表达式是未知的, 在此情况下采用量纲分析法来求得独立的相似准则。 π 项具有 2 个特点^[8]: 各物理量的函数及无量纲。因此, 这里的 π 项可写为

$$\pi = \Delta t^{\beta_1} \Delta H^{\beta_2} k^{\beta_3} E_s^{\beta_4} n^{\beta_5} \quad (3)$$

或写成量纲方程形式:

$$[\pi] = [F^0 L^0 T^0] = [T]^{\beta_1} [L]^{\beta_2} [LT^{-1}]^{\beta_3} [FL^{-2}]^{\beta_4} \quad (4)$$

根据方程量纲齐次原则, 可得:

$$\beta_4 = 0; \quad \beta_2 + \beta_3 - 2\beta_4 = 0; \quad \beta_1 - \beta_3 = 0 \quad (5)$$

根据线性代数的有关理论^[9], 得到式(5)解:

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} a + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} b \quad (6)$$

式中 a 和 b 为任意实数。

分别令 $a = 0, b = 1$ 和 $a = -1, b = 0$, 可得到相互独立的 2 个相似准则:

$$\pi_1 = n; \quad \pi_2 = \frac{\Delta H}{k \Delta t} \quad (7)$$

由式(7)可见, 2 个相似准则中均不含压缩模

量, 造成这一现象的根本原因可能在于量纲分析法存在的固有缺陷和不足, 例如“很难发现在关系方程中常会遇到的带有量纲的物理常数, 因而未把它们列为物理量之一”^[8]。如果将水的重度也列为物理量, 同理可求得如下的 3 个独立的相似准则:

$$\left. \begin{aligned} \pi_3 &= n = \pi_1; \quad \pi_4 = \frac{\Delta H}{k \Delta t} = \pi_2; \\ \pi_5 &= \frac{\Delta H^2}{\frac{KE_s}{\gamma_w} \Delta t} = \frac{\Delta H^2}{C_v \Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

为得到 Biot 固结有限元方程组系数矩阵的病态性变化规律, 这里探讨 $\lg n$ 与无量纲量 $p = \lg \pi_4$ 和 $q = \lg \pi_5$ 之间的关系。

在以下的参数分析中, 单元平均尺寸、渗透系数和压缩模量的取值各分为 3 个水平, 见表 5。约定用 S_{ij} (或 S_{ijk}) 表示单元平均尺寸取水平 i , 渗透系数取水平 j (或压缩模量取水平 k) 时的情况。每种情况下的时间步长 d 分别取 $10^2, 10^1, 1^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ 等共 8 个典型值。

表5 典型情况的参数水平表

Table 5 List of parameter levels for typical cases

水平	单元平均尺寸 /m	渗透系数 / $10^{-4}\text{m}\cdot\text{d}^{-1}$	压缩模量 /MPa
1	0.5	8.64	0.6
2	1	0.864	1.2
3	2	0.0864	2.4

由上面的分析可知, 无量纲量 p 与压缩模量无关, 而 q 则包含了压缩模量的影响。图 2 和图 3 分别反映了 $\lg n$ 随 p 和 q 的变化规律, 可直观地看到两个基本特征: S_{ij} 和 S_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$) 对应的曲线形态基本一致; 随着 p 和 q 的增大, $\lg n$ 总体上均在呈现增长的趋势。前者说明了压缩模量对 $\lg n$ 的形态没有明显影响, 后者表明 $\lg n$ 对于无量纲量 p 和 q 具有良好的单调性, 可以用 p 和 q 作为衡量 Biot 固结有限元方程组病态程度的相关指标。

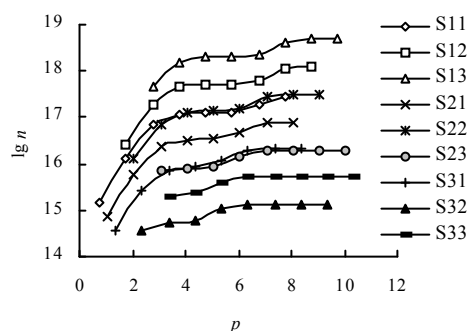
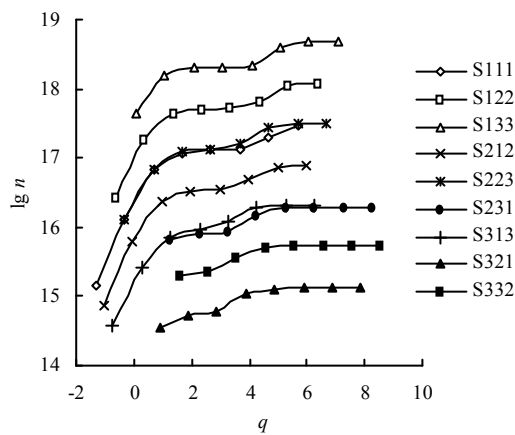
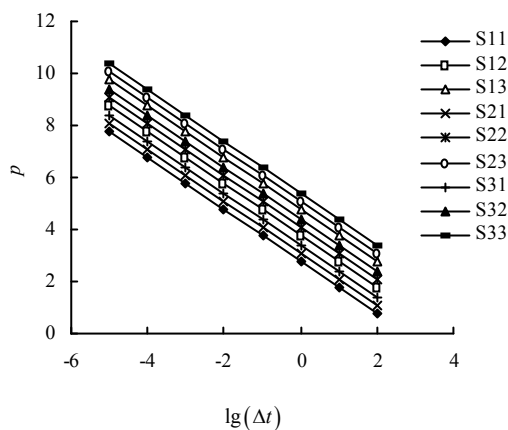
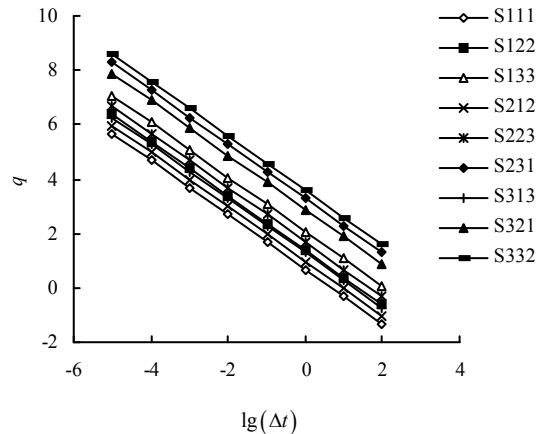


图2 $\lg n$ 与 p 的关系
Fig.2 Relation between $\lg n$ and p

图3 $\lg n$ 与 q 的关系Fig.3 Relation between $\lg n$ and q

对某一实际工程进行 Biot 固结有限元分析时,地基的压缩性和渗透性通常是已知的,有限元网格也可由前处理程序预先确定,此时在理论上可以计算任意时刻的场变量,但由于数值求解技术中的病态问题,时间步长通常不能取任意小值。从这个角度看,时间步长该如何取值呢?前言中已叙及,沈珠江和 Verruijt 等曾给过估计公式。为了更好地理解这一问题,不妨考察时间步长与无量纲量 p 和 q 的关系。图 4 和图 5 分别为几种典型情况下时间步长的对数值 $\lg(\Delta t)$ 随 p 和 q 的变化规律,可见对同一情况而言,随着 $\lg(\Delta t)$ 的减小, p 和 q 均呈线性规律递增。前面的分析结果已表明, $\lg n$ 随 p 和 q 的增大具有单调增加的特点。因此时间步长的减小将导致 Biot 固结有限元方程组病态程度的提高。反之,增大时间步长则有利于降低问题的病态性。

图4 $\lg(\Delta t)$ 与 p 的关系Fig.4 Relation between $\lg(\Delta t)$ and p 图5 $\lg(\Delta t)$ 与 q 的关系Fig.5 Relation between $\lg(\Delta t)$ and q

4 讨论

从本文无量纲分析的角度,对比沈珠江建议的时间步长公式:

$$\frac{\Delta H^2}{4C_v} < \Delta t \leq \frac{\Delta H^2}{C_v} \quad (9)$$

采用本文的无量纲量,式(9)可转换为如下的等价形式:

$$1 \leq \pi_5 < 4 \text{ 或 } 0 \leq q < 2 \lg 2 \quad (10)$$

分析图 3 中的数据可以发现,当满足 $0 \leq q < 2 \lg 2$ 时,各种典型情况下的 $\lg n$ 值相对较小,且 $\lg n$ 的数量级变化范围大约介于 $10^{14} \sim 10^{18}$ 。当 $q \geq 2 \lg 2$ 即时间步长取值更小时, $\lg n$ 值将随 Δt 的减小明显增加,反映出病态程度的加剧,从而使问题的求解更加困难。殷宗泽教授等^[10]早就发现,在 Δt 很小的情况下常规求解方法是不适用的。这一现象的根本原因,可以从病态程度 $\lg n$ 的提高得到解释。

实际计算中,如果某一级加荷后期的孔压变化较小,根据经验可以将 Δt 取得较大(通常可达几十天),但这样一来, $q \geq 0$ 的条件将难以得到满足。事实上, $q \geq 0$ 的条件是沈珠江^[3]根据抛物线型方程在差分求解时的收敛性和稳定性要求得到的。BOOKER 等^[11]则认为,只要差分系数 $\theta \geq 0.5$,任何关于时间函数的积分方法都是无条件稳定收敛的。按照这一观点, $q \geq 0$ 的条件似乎是不必要的,因常用的时间差分系数一般都要满足 $0.5 \leq \theta \leq 1$ 。这一问题尚有待深入研究和探讨。

客观地讲, Biot 固结有限元方程组的病态程度

是相对的。随着计算机技术的发展,尤其是计算机字长的增长,高精度的运算可以减轻病态的影响。病态方程组的有效解法在计算数学专著中一般都有介绍。只要在消去法的基础上,对已求得的近似解不断改进,就可以达到较为准确的结果。但在当前条件下研究 Biot 固结有限元方程组的病态规律仍是很有意义的。

5 结 语

本文主要探讨了有限单元平均尺寸、压缩模量、渗透系数和时间步长等 4 个因素对 Biot 固结有限元方程组病态程度的影响,结合软基算例进行了正交数值试验,并根据量纲分析法得到了 2 组相互独立的相似准则,分析了病态程度随 2 个无量纲量的变化规律:

(1) 正交试验的极差分析结果表明,对病态程度敏感性由大到小的影响因素依次为单元平均尺寸、时间步长、压缩模量和渗透系数。单元尺寸划分太小则很容易加剧问题的病态程度,值得注意。

(2) 无量纲参数分析的结果表明, Biot 固结有限元方程组系数矩阵的条件数均随 2 个无量纲量的增加而增大,此 2 个无量纲量可作为衡量 Biot 固结有限元方程组病态性的指标。在其它条件不变情况下随时间步长的减小, 2 个无量纲量逐渐增大,反映出病态程度的加剧。最后给出了沈珠江推荐的时间步长范围公式的等效无量纲形式。

以上结果有助于深化对 Biot 固结有限元方程组病态规律的认识,为数值计算提供有益参考。

参 考 文 献

- [1] Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. *Journal of Applied Physics*, 1941, 12: 155—164.
- [2] 朱百里, 沈珠江, 龚晓南, 等. 计算土力学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990. 100—120
- [3] 沈珠江. 用有限单元法计算软土地基的固结变形[J]. 水利水运科技情报, 1977, (1): 7—23.
SHEN Zhu-jiang. Prediction of consolidation deformation of soft foundation using FEM[J]. *Journal of Nanjing Hydraulic Research Institute*, 1977, (1): 7—23.
- [4] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算 (第二版)[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996. 199—258.
- [5] 龚晓南. 土工计算机分析[M]. 北京: 建筑工业出版社, 2000. 32—91.
- [6] 李庆扬, 关治, 白峰杉. 数值计算原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000. 140—241.
- [7] 孙荣恒. 应用数理统计(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2003. 171—192.
- [8] 徐挺. 相似方法及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1995. 40—48.
- [9] 陈维新. 线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 2000. 156—307.
- [10] 殷宗泽, 徐鸿江, 朱泽民. 饱和土平面固结问题有限单元法[J]. 华东水利学院学报, 1978, (1): 71—82.
YIN Zong-ze, XU Hong-jiang, ZHU Ze-min. Finite element method for plane strain consolidation of saturated soils[J]. *Journal of Hohai University (Natural Sciences)*, 1978, (1): 71—82.
- [11] BOOKER J R, SMALL J C. An investigation of the stability of numeric solutions of Biot's equations of consolidation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1975, (11): 907—917.

书 讯

土质学与土力学

建筑科学类 赵明阶主编 16 开 490 千字 300 页 平装 估价: 30.00 元
2006 年 12 月出版 ISBN7-114-06263-X

本书系统介绍了土质学与土力学的基本原理和分析计算方法,包括土的物理性质及工程分类、土中水及其渗透性、地基土中的应力计算、地基变形计算、土的抗剪强度、土压力计算、土坡稳定计算、地基承载力以及土的动力特性等内容。

读者对象: 高等学校土木工程专业及其相关专业应用型本科学生和成人教育学院学生。